

重慶大學

《数学实验》创新实验论文



论文题目：寄宿家庭安排方案

姓名	学院	年级专业	学号
高聪明	计算机学院	10级信息安全	20105470
姚志刚	电气学院	10级电气工程与自动化	20104405
代朋纹	计算机学院	10级信息安全	20105437

寄宿家庭安排方案

【摘要】

本文将寄宿家庭安排抽象为运输问题的模型，采用 0-1 整数规划表述。把所给的数据进行有规律的分类排序，根据寄宿中心需要建立不同目标的 0-1 整数规划模型，运用 *Lingo* 软件求解，并运用贪心算法检验模型的求解。

第一问，我们先对 30 个寄宿家庭按照性别要求、床位数进行排序，使数据有一定的规律，方便编程和结果分析。以所需要的总寄宿家庭数为目标，结合人数、性别要求、男女不混住等约束，建立 0-1 整数规划模型（见 5.1.3 模型 I），完成把 2 个组的所有学生分配到 30 个家庭的要求。用 *Lingo* 软件对此模型求解，得到最优方案，最少需要 20 个寄宿家庭，具体的方案如下（列举一种，其他结果见 5.2.2）：

	寄宿家庭 ID 号
男生入住的家庭	4, 5, 8, 11, 15, 24, 26, 27
女生入住的家庭	1, 2, 3, 7, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 21, 28

针对此问题，我们又运用了贪心算法进行求解，提供与 *Lingo* 求解的对照，以到达检验此模型的求解。

第二问，由于问题的框架是在问题一的基础上给出了具体的各种费用，所以我们对问题一的模型做了更新，其目标变为寄宿中心总的支出费用最少，寄宿家庭数变为 200 个。同样的思路，建立 0-1 整数规划模型（见 6.13 模型 II），用 *Lingo* 软件对此模型进行求解。求得的最优支出费用为 7700 美元，选择的家庭最少为 14 个。具体方案如下（列举一种，其他结果见 6.2.2）：

	寄宿家庭 ID 号
男生入住的家庭	27, 43, 50, 81, 86, 122
女生入住的家庭	16, 52, 58, 98, 102, 142, 144, 159

第三问，考虑到 10 个团队中有一些团队不愿与其他团队共寄一檐，我们可以把这 10 个团队按照是否与其他团队共寄原则从新分组，以寄宿中心总的支出费用为目标，以每个组的人数、男女不混住、新分的组之间不共寄等为约束，建立 0-1 线性规划模型（见 7.1.3 模型 III）。

由于 10 个团队中没有给出哪个团队不愿与其他团队共寄，而总的情况种类又很多，我们在模型求解中列举了有 1 个团队、有 5 个团队不与其他团队共寄的两种情况。结果解出最优支出费用为 64050 美元，最少寄宿家庭数为 169 个（具体结果见 7.2.2）。然后又运用贪心算法的思想编写 *Matlab* 程序，对模型的求解进行检验。

关键词： 0-1 整数规划 贪心算法 运输模型

一. 问题重述

暑期将至，北京“常青藤”文化旅行社国际部与美国 Homestay Center 联合为中学生打造了一个美国文化之旅的夏令营活动。此活动主要集中在素有“美国经济之都”之称的纽约地区，通过走访考察常青藤名校，深度了解普林斯顿、耶鲁、哈佛、麻省理工等名校录取标准和教学理念，感受中美教育文化的差异。同时，走进美国寄宿家庭，通过朝夕相处，接受纯正美式英语的熏陶，迅速提高英语听力及口语交流水平。通过夏令营，亲身体验美国本土生活，深度感受美国社会经济文化，让年青的中学生们在激动不已的同时，开始重新设计充满挑战的未来。

纽约片区的寄宿家庭通过向寄宿中心 (Homestay Center) 提出申请，提交接受学生床位数，学生性别要求等相关信息。寄宿中心审核通过，便获得接收寄宿学生的资格。寄宿家庭对寄宿学生无性别要求的，男生女生均可安排，但不能男女生混住。现在就所给的数据解决以下问题：

1. 现有一组男生 30 人，女生 40 人的旅行团队，计划在 ID 为 1~30 的家庭中进行安排。请你建模为寄宿中心做出寄宿家庭接收学生的方案。

2. 事实上，寄宿家庭提供的是有偿服务，每安排一位学生入住，寄宿中心就要向寄宿家庭支付 100 美元。但如果入住的学生少于其提供的床位，则每床加收 20 美元的空床费；另外，根据联邦法律，只要寄宿家庭提供了寄宿服务，无论入住人员多少，都要交税 50 美元，这项费用也由寄宿中心承担。请更新你的模型，做出寄宿家庭接收学生方案，使支出费用最小。

3. 在寄宿家庭分配环节中，总有些团队，如来自一个家庭，一个学校等，不希望与别的团队共寄一檐。现在寄宿中心今年夏天共有 10 个团队，其成员结构详见所给数据。请你为寄宿中心做出最优的寄宿方案，并求出最小的支出费用。

二. 问题分析

本题主要在三种不同情况下，研究寄宿中心做出合理的寄宿方案选择问题。联系实际，寄宿中心做出寄宿家庭接收学生的方案主要考虑的因素包括：各家庭提供的床位数，学生性别，所需要的寄宿家庭数，是否愿意与别的团队共寄，支出费用等因素。在满足学生的居住要求的前提下，主要依据支出费用和寄宿家庭数，来确定出最佳的寄宿方案。

在仅考虑完成寄宿安排方案的情况下，首先，需要对题目给出的寄宿家庭资源的 ID 为 1~30 的家庭进行性别要求分类，与每个家庭的床位数对应。然后，主要考虑男女不能混住、寄宿家庭的性别要求、床位数，将 30 个男生、40 个女生分配到 30 个寄宿家庭。并考虑以所需寄宿家庭的数目为主要目标，建立最优化模型确定可供寄宿中心选择的寄宿方案。

在第二问的情况下，寄宿家庭提供的是有偿服务，且提供了寄宿服务的都要交税，这些费用全部由寄宿中心承担。所以，在第一问的基础上更改为以支出费用为主要目标，在 200 个寄宿家庭中寻找寄宿分配方案。在此基础上按照相同的思路确定出最佳寄宿安排方案。

第三问增加了有些团队不希望与别的团队共寄一檐这一条件，可考虑将此 10 个团队按照性别、是否愿意与别的团队共寄，分成若干组，即组与组之间不能共寄。例如，若有一个团队不愿与别的共寄，则可分为 2 个团队 4 个组。再把 4 个组的成员分配到 200 个寄宿家庭，以支出费用为目标结合约束条件即可确定最优方案。此种约束分配在现实

中具有重要意义，可以延伸到任意个不愿共寄的团队和个人。

三. 模型假设

- [1] 假设每个团队内同性别的成员可以共寄一檐；
- [2] 假设各个团体的学生都接受寄宿中心安排的寄宿家庭；
- [3] 假设每个寄宿家庭的环境的因素不影响学生入住安排；
- [4] 假设对每个家庭按照床位数进行排序时，具有相同床位数的家庭不存在优先顺序；
- [5] 假设每个家庭均能接受任何寄宿中心安排入住的学生；
- [6] 假设安排学生入住寄宿家庭后不存在家庭调换的情况。

四. 符号说明

x_{ij} : 源点 i 能否可以把学生送往 j 号家庭

a_{ij} : 源点 i 送往 j 号家庭的人数

d_j : j 号家庭的床位数

C_1 : 每个提供寄宿服务且有人入住的家庭所需缴纳的税费，在此题中已给出 50 美元

C_2 : 每个提供寄宿服务的家庭若床位没有住满，每个空床寄宿家庭需支付的空床费，在此题中已给出 20 美元

C_3 : 每个学生入住寄宿家庭，寄宿中心需支付给寄宿家庭的费用，此题中已给出 100 美元

五. 寄宿家庭接收学生选择模型（问题一）

本节主要研究寄宿分配方案选择的数学模型与算法。为了寻找出选取寄宿家庭的方案，可以把此题看做运输问题模型^[1]，以所需的总寄宿家庭数为目标，结合人数、性别要求、男女不混住等约束，求出可行方案。

5.1 模型 I 分析与建立

5.1.1 最优分配思路的确立

此问题的要求是给 30 名男生、40 名女生男生分配寄宿地点，即把这 70 名对象分配到 30 个寄宿家庭。所以，可以把所有男生看做一个源点 1，拥有 30 个货物；所有女生看做源点 2，拥有 40 个货物。

要解决的问题既是把这两个源点的货物全部运到 30 个目的地，每个目的地接收的货物不能超过其容量。因此，此寄宿家庭安排问题可以看做一个典型的运输问题。其模型的示意图如下：

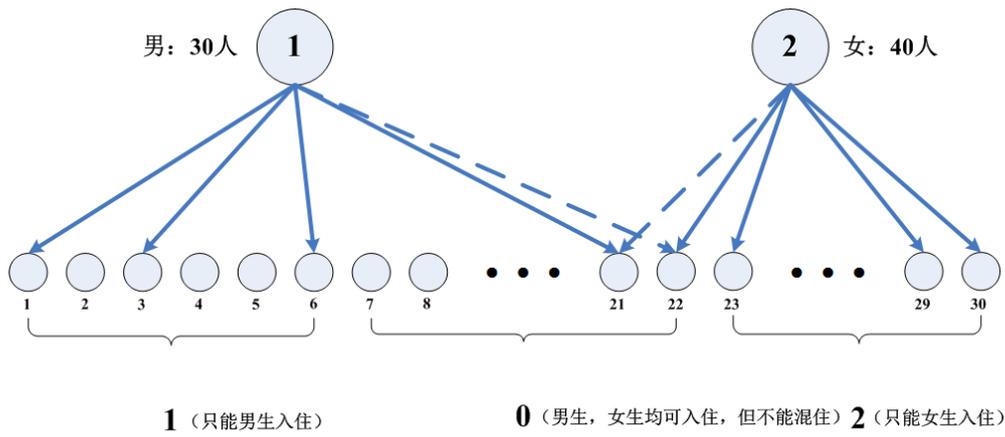


图1 问题抽象为运输问题的示意图

为了便于数据的分析和处理，需要把 ID 号为 1~30 的数据进行分类，分类按着性别要求，得到的结果按照性别要求 1、0、2 的顺序排列。排序的结果为只能住男生的是 1~6 号，没有性别要求的是 7~22 号，只能住女生的是 23~30 号。（ID 号为 1~30 的数据分类排序的详细结果详见附件 2.1）

5.1.2 模型 I 分析

我们结合实际，考虑到寄宿中心根据自身工作量要求，总是希望与最少数量的寄宿家庭建立联系。所以，以方案中所需要的寄宿家庭数量为目标，再结合完成分配的一些约束条件，建立求解此问题的模型。

下面将分析解决此问题的目标和约束条件。

目标分析

寄宿中心选择了寄宿家庭后，不可避免的会与这些家庭经常联系，例如了解学生寄宿的情况、探访学生，这就使得寄宿中心希望学生寄宿相对集中、寄宿家庭数目少，从而减少自己的工作量。

基于 5.1.1 建立的运输模型示意图，引入 0-1 决策变量 x_{ij} 表示是否从源点 i 运输到第 j 个寄宿家庭，则：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{从 } i \text{ 送到第 } j \text{ 个寄宿家庭} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

要使得学生入住的家庭数最少，对于运输问题的模型即希望目的地最少，则有：

$$\text{Min } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{30} x_{ij} \quad (1.1)$$

约束分析

1) 男生人数约束

可寄宿男生的家庭包括性别要求为男和无性别要求的家庭，所以源点 1 的男生可以被送往的家庭号位 1~22 号，即源点 1 的 30 个男生将全部被送往 $j=1 \cdots 22$ 号中的某些家庭。所以有：

$$\sum_{j=1}^{22} a_{1j} x_{1j} = B \quad (1.2)$$

其中，参数 B 为男生人数，可以根据实际情况设定，在此题中已给出为 30 人。

2) 每个家庭床位数对男生的约束

男生被送往第 j 号家庭对应 a_{1j} 人，第 j 号家庭拥有的床位数为 d_j 个，每个家庭接收的人数不能大于提供的床位数。所以需要满足：

$$a_{1j} \leq d_j \quad j=1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

3) 女生人数约束

可寄宿女生的家庭包括性别要求为女和无性别要求的家庭，所以源点 2 的女生可以被送往的家庭号位 7~30 号，即源点 2 的 40 个女生将全部被送往 $j=7 \dots 30$ 号中的某些家庭。所以有：

$$\sum_{j=7}^{30} a_{2j} x_{2j} = G \quad (1.4)$$

其中，参数 G 为女生人数，可以根据实际情况设定，在此题中已给出为 40 人。

4) 每个家庭床位数女生的约束

女生被送往第 j 号家庭对应 a_{2j} 人，第 j 号家庭拥有的床位数为 d_j 个，每个家庭接收的人数不能大于提供的床位数。所以需要满足：

$$a_{2j} \leq d_j \quad j=7, 8, \dots, \quad (1.5)$$

5) 男女不混住约束

在无性别要求的家庭 $j=7, 8, \dots, 22$ 中，如果男生被送往 j ，则女生一定不能被送往相同的 j 号家庭，即要求男女不混住。所以满足：

$$x_{1j} x_{2j} = 0 \quad j=7, 8, \dots, \quad (1.6)$$

另外，源点 i 送往 j 号家庭的人数 a_{ij} 需满足： $a_{ij} \in N$ (N 为自然数)。

5.1.3 模型 I 建立

基于 5.1.2 分析，以 (1.1) 为目标，以 (1.2)~(1.6) 为约束，建立 0-1、整数混合规划^[2] 的运输模型，表达式如下：

$$M \text{ in} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{30} x_{ij}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{22} a_{1j} x_{1j} = B$$

$$a_{1j} \leq d_j \quad j=1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=7}^{30} a_{2j} x_{2j} = G$$

$$a_{2j} \leq d_j \quad j=7, 8, \dots, \quad (1.5)$$

$$x_{1j} x_{2j} = 0 \quad j=7, 8, \dots, \quad (1.6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, a_{ij} \in N$$

模型说明:

(1.3)、(1.5) 为床位约束, 分别表示一个寄宿家庭接收的男、女生人数不大于床位数。

(1.6) 男女不能混住约束, 表示对于同一个寄宿家庭最多只有一类学生(男或女)入住。

x_{ij} ——从源点 i 是否送到第 j 个寄宿家庭;

a_{ij} ——从源点 i 送到第 j 个寄宿家庭的人数;

d_j ——第 j 号家庭拥有的床位数;

B ——男生人数, 可以根据实际情况设定, 在此题中已给出为 30 人;

G ——女生人数, 可以根据实际情况设定, 在此题中已给出为 40 人。

5.2 模型 I 的求解 (程序见附件 1.1)

5.2.1 模型求解的方法

此模型为一个标准的整数规划问题, 可使用 *Lingo* 软件^[3] 求解。

在 *Lingo* 中编写类似于运输问题模型的程序, 其数据量不是很大, 其中的变量 x_{ij} 用 0-1 约束条件, a_{ij} 用整数约束条件。总体规划模型的语言比较简单, 只需 1 秒便可解出结果。由于此题的方案数表较多, 目标较少, 得到的结果只是一个局部最优解。

5.2.2 求解的结果

用 *Lingo* 软件多次求解的结果都是: 需要的最少家庭数为 20 个。

(1) 具体方案举例

寄宿家庭安排的一种具体方案: 下表列举了一种具体的寄宿安排分配方案, 一行代表每个家庭的床位数、寄宿情况、入住人数, 性别列表示了寄宿学生的性别、是否寄住此家庭 (“-” 表示不寄住此家庭)。

表 1 寄宿家庭安排的具体方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住数	性别
1	3	3	女	16	5	5	女
2	3	3	女	17	1	0	-
3	4	4	女	18	3	0	-
4	3	3	男	19	3	2	男
5	4	4	男	20	2	0	-
6	3	0	-	21	4	4	女
7	3	3	女	22	2	0	-
8	4	4	男	23	1	0	-
9	3	3	女	24	4	4	男
10	3	3	女	25	1	0	-
11	4	4	男	26	4	4	男
12	3	3	女	27	5	5	男
13	3	3	女	28	4	4	女
14	2	0	-	29	3	3	女
15	2	0	-	30	1	0	-

《注》：表中添加背景的一行数据表示寄住在此家庭（ID：19），但床位没有住满（空1个）。

(2) 与上述方案类似的方案

寄宿中心可以选择的方案（有一个空床位）：

表2 寄宿中心可选择的方案列表

床位数	男女均能入住家庭数	男生入住家庭数	女生入住家庭数
2	0	0	0
3	7	1	2
4	2	3	3
5	0	1	1

《注》：在总家庭数最小即为20的情况下，存在一个空床位。

在0属性的寄宿家庭中：

1) 需要3张床位的7个家庭可从ID为1、2、9、10、12、18、19、29的家庭中选择1个家庭供男生入住且进入住2人，存在 C_8^1 种可能，另外从剩余的7个家庭中选择6个家庭供女生入住，存在 C_7^6 种可能。

2) 需要4张床位的2个家庭选择ID为11、24的家庭供男生入住。

在1属性的寄宿家庭中：

1) 需要3张床位的1个家庭可从ID为4和6的家庭中选择1个家庭，存在 C_2^1 种可能。

2) 需要4张床位的3个家庭选择ID为5、8、26的家庭。

3) 需要5张床位的1个家庭选择ID为27的家庭。

在2属性的寄宿家庭中：

1) 需要3张床位的2个家庭选择ID为7、13的家庭。

2) 需要4张床位的3个家庭选择ID为3、21、28的家庭。

3) 需要5张床位的1个家庭选择ID为16的家庭。

方案数：

$$N_1 = C_8^1 \times C_7^6 \times C_2^1 = 112.$$

(3) 寄宿家庭没有空床位的方案

寄宿中心可以选择的方案（没有空床位）：

表3 寄宿家中心可选不产生空床位的方案列表

床位数	男女均能入住家庭数	男生入住家庭数	女生入住家庭数
2	1	0	0
3	6	1	2
4	2	3	3
5	0	1	1

《注》：在总家庭数最小即为20的情况下，不存在空床位。

在0属性的寄宿家庭中，

1) 需要2张床位的1个家庭可从ID为15、20、22的家庭中选择1个家庭供男生入住，存在 C_3^1 种可能。

2) 需要 3 张床位的 6 个家庭可从 ID 为 1、2、9、10、12、18、19、29 的家庭中选择 6 个家庭供女生入住, 存在 C_8^6 种可能。

3) 需要 4 张床位的 2 个家庭选择 ID 为 11、24 的家庭供男生入住。

在 1 属性的寄宿家庭中,

1) 需要 3 张床位的 1 个家庭可从 ID 为 4 和 6 的家庭中选择 1 个家庭, 存在 C_2^1 种可能。

2) 需要 4 张床位的 3 个家庭选择 ID 为 5、8、26 的家庭。

3) 需要 5 张床位的 1 个家庭选择 ID 为 27 的家庭。

在 2 属性的寄宿家庭中,

1) 需要 3 张床位的 2 个家庭选择 ID 为 7、13 的家庭。

2) 需要 4 张床位的 3 个家庭选择 ID 为 3、21、28 的家庭。

3) 需要 5 张床位的 1 个家庭选择 ID 为 16 的家庭。

方案数:

$$N_2 = C_3^1 \times C_8^6 \times C_2^1 = 168.$$

总方案数:

$$N = N_1 + N_2 = 280.$$

5.3 模型 I 的检验 (程序见附件 1.2)

在求解此问题的最优方案时, 我们可以采用贪心算法求得近似最优解, 去验证所求的结果是否为最优解。

贪心算法^[4]求解步骤:

假设: 在选择 1 属性和 2 属性的寄宿家庭的情况不变的条件下, 对于遇到 0 属性的寄宿家庭, 优先分给男生居住或者优先分给女生居住的情况下。对该种 0 属性寄宿家庭的不同分配顺序能减少总的所需的寄宿家庭数。

预处理: 对 ID 为 1~30 号的寄宿家庭的床位数进行降序排序, 并设 a_i 表示排序后第 i 个寄宿家庭的床位数, 因此 $\{a_i\}$ 为非递增数列, $i=1,2,\dots,30$ 。

符号表示:

n : 在贪心选择情况下, 遇到 0 属性的寄宿家庭时, 优先分给男生或女生居住的情况下所需总得寄宿家庭数。

k : 存在一个更优解, 使得总的所需的寄宿家庭数为 k 。

$N(n)$: n 个上述情况中的寄宿家庭的床位数总和。

$N(k)$: k 个上述情况中的寄宿家庭的床位数总和。

e : 当 $N(k) < N(n)$ 时, 额外需要增加的寄宿家庭数。

$N(e)$: 额外增加的家庭数的床位数总和。

该问题贪心策略:

① 首先选择 $\{a_i\}$ 中数值最大的值, 即选择该 30 个家庭中床位数最多的家庭。由此, 下一个子问题中选择剩余 $\{a_i\}$ 数列中的最大值亦是一个贪心的选择。

② 假设该问题存在一个更优解, 该更优解来自于对 0 属性寄宿家庭的不同分配顺序, 使存在一个总的所需寄宿家庭总数 $k < n$ 。又因为, 对于遇到 1 属性和 2 属性的寄宿家庭的选择一定, 另外 $N(n)$ 中包含了对 0 属性寄宿家庭的贪心选择, 所以, 若 $k < n$,

那么 $N(k) < N(n)$ 必然成立。由题意得，在原假设条件下进行选择寄宿家庭， $N(n) = 70$ 。所以， $N(k) < 70$ 。

因此，我们必须增加 e 个寄宿家庭，使 $N(e) = N(n) - N(k)$ 。针对更优解来自于对 0 属性寄宿家庭的不同分配顺序，必然还需增加额外的 e 个寄宿家庭，该 e 个寄宿家庭不来自于先遇到的 0 属性寄宿家庭，而是属于较为后排的补充选择。根据 $\{a_i\}$ 是非递增数列，因此 $e \geq n - k$ 。所以该“更优解”应该修改为 $k + e$ 。 $k + e \geq n$ 与假设矛盾，因此不存在更优解，所以，原问题结构为最优子结构，且贪心选择为安全的贪心选择。

③ 该选择是一个自顶向下的选择，每一步选择寄宿家庭均选择具有最大床位数的寄宿家庭，直到选择的床位数满足要求。因此，每一步的局部最优选择最后形成了全局的最优。

利用该贪心算法的思想，通过编写 C++ 程序求得的结果：最少寄宿家庭选择数为 20。因此，不存在少于 20 的更优选择方案。

5.4 模型的评价

1) 在用 0-1 规划和整数规划求解得出的方案数与用贪心算法求解得出的方案数相同，表明模型的通用性较强，但用 Lingo 软件求解仅得到一种方案，这是用户所不能接受的。

2) 由于目标较少，方案数较多，因此在用 0-1 规划时求解得到仅为一个局部最优解，在限制总家庭数最少的情况下可得到最少家庭数为 20，额外再限制空床数最少的情况下，再优化得到相应不存在空床数，且家庭数依旧最少的方案。

3) 贪心算法的策略能够获取最优的选择方案，并证明不存在更优的解，但由于方案数较大，在用贪心算法编程求解全部方案解的过程中会存在较高的时间复杂度，这是需要避免的。

4) 在该模型求解过程中，我们得出的实际方案中选择的寄宿家庭的床位数不存在 1 个床位的家庭，这更能考虑实际情况，通常情况下学生不希望自己一人独自寄宿在他人家中。

5) Lingo 只能解出一种寄宿方案，实用性不如贪心算法，但若遍历所有可能方案，贪心算法的时间复杂度较大，不如 Lingo 简便快速。

6) 由于该方案的寄宿家庭数为 30 个供寄宿中心选择，因此在用 Lingo 求解出一种方案后，可以按照该方案，选择其中具有相同性质的家庭进行相互替换。

六. 寄宿中心支出费用选择模型（问题二）

本问在第一问的基础上增加了寄宿的各种具体费用，供选择的寄宿家庭数增加到 200 个。主要研究以支出费用为目标的寄宿分配方案选择的数学模型与算法，主要解决问题的思路与第一问相似。

6.1 模型 II 分析与建立

6.1.1 寻找最优方案思路的确立

此问题问题仍可以把男生、女生看做两个源点的货物，要求把他们全部运到 200 个目的地，每个目的地接收的货物不能超过其容量。运输问题模型仍成立，可以参见问题一的解决思路

6.1.2 模型分析

我们结合实际，考虑到寄宿中心根据总是希望自己支出费用最少，作为首要目标。所以，以方案中所需要的寄宿总的支出费用为目标，再结合完成分配的一些约束条件，建立求解此问题的模型。

下面将分析解决此问题的目标和约束条件。

目标分析

寄宿中心选择了寄宿家庭后，要支付学生入住费、空床费、税费，而学生入住费是不变的，所以要最大程度减少空床费和税费。这需要使学生寄宿家庭数目少、空床数量少，从而使支出费用最低。

对于此问题，引入 0-1 决策变量 x_{ij} 表示是否从源点 i 运输到第 j 个寄宿家庭，则：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{从 } i \text{ 送到第 } j \text{ 个寄宿家庭} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

题目规定提供寄宿服务的每个家庭税费为 50 美元，用 C_1 表示，则总共需要支付的**税费**可表示为：

$$P_1 = C_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{200} x_{ij} \quad (2.1)$$

题目中说明提供寄宿服务的家庭若床位没有住满，每个空床费为 20 美元，用 C_2 表示，则总共需要支付的**空床费**可表示为：

$$P_2 = C_2 \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{200} d_j x_{ij} - B - G \right) \quad (2.2)$$

其中， d_j 为第 j 号家庭所提供的床位数， B 为男生人数（本题为 30 人）， G 为女生人数（本题为 40 人）。

另外，还有固定的费用需要支付，即每人 100 美元（用 C_3 表示）的入住费，总人数是固定的，所以此费用是固定的。总共需要支付的**入住费**可表示为：

$$P_3 = C_3 (B + G)$$

所以，以总费用为**目标函数**，可以表示为

$$\text{Min } P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.3)$$

约束分析

1) 男女人数约束

所有男生和所有女生都要被分配到寄宿家庭，并且寄宿家庭有性别要求，即每个寄宿家庭只能寄宿同一类学生。所以必须满足下列约束：

$$\sum_{j=1}^{200} a_{ij} x_{ij} = \begin{cases} B & (i=1) \\ G & (i=2) \end{cases} \quad (2.4)$$

2) 床位约束

男生和女生被送往第 j 号家庭对应应有 a_{ij} 人，但第 j 号家庭提供的床位数为 d_j 个，所以每个家庭接收的人数不能大于提供的床位数。这需要满足：

$$a_{ij} \leq d_j \quad (i=1,2) \quad (2.5)$$

3) 男女不混住约束

男生、女生不能同住在一个寄宿家庭，即每个家庭最多只能被一组成员选中。所以，不混住的约束条件为：

$$x_{1j} + x_{2j} \leq 1 \quad (2.6)$$

另外，男生女生被送往第 j 号家庭人数 a_{ij} 应满足： $a_{ij} \in N$ (N 为自然数)。

6.1.3 模型 II 建立

基于 6.1.2 分析，以 (2.3) 为目标，以 (2.4) ~ (2.6) 为约束，建立 0-1、整数混合规划，表达式如下：

$$\text{Min } P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_1 = C_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{30} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$P_2 = C_2 \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{30} d_j x_{ij} - B - G \right) \quad (2.2)$$

$$P_3 = C_3 (B + G)$$

$$S.T. \begin{cases} \sum_{j=1}^{22} a_{ij} x_{ij} = \begin{cases} B & (i=1) \\ G & (i=2) \end{cases} & (2.4) \\ a_{ij} \leq d_j & (i=1,2) & (2.5) \\ x_{1j} + x_{2j} \leq 1 & & (2.6) \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad a_{ij} \in N (N \geq 0) & & \end{cases}$$

模型说明：

(2.1) 为寄宿中心应支付的税费。 (2.2) 为寄宿中心应支付的空床费。

(2.4) 为男女人数的约束，即每个人都要被安排。

(2.5) 为每个家庭的床位限制。 (2.6) 为不能混住约束。

x_{ij} —— 第 i 组内学生是否被送到第 j 个寄宿家庭；

a_{ij} —— 从第 i 组送到第 j 个寄宿家庭的人数；

d_j —— 第 j 号家庭拥有的床位数；

B —— 男生人数，可以根据实际情况设定，在此题中已给出为 30 人；

G —— 女生人数，可以根据实际情况设定，在此题中已给出为 40 人；

C_1 、 C_2 、 C_3 —— 分别为每个家庭的税费、空床位费、每个学生入住费。

6.2 模型 II 的求解 (程序见附件 1.3)

6.2.1 模型求解的方法

此模型为一个标准的整数规划问题，可使用 *Lingo* 软件求解。

在 *Lingo* 中编写类似于运输问题模型的程序，其家庭数增加到 200 个，总的变量

个数比问题大大增加。问题中的 x_{ij} 用 0-1 约束条件, a_{ij} 用整数约束条件。总体规划模型的语言比问题一有所增加较, 约 3 秒便可解出结果。由于此题的方案数表较多, 目标较少, 得到的结果只是一个局部最优解。

6.2.2 求解的结果

用 *Lingo* 软件多次求解的结果都为: 需要支付的最少费用为 7700 美元, 入住的家庭数为 14 个, 且没有空床位产生。

1) 具体方案举例

Lingo 解出的一种具体的寄宿安排分配方案 (男生选 6 个家庭、女选 8 个家庭): 一行包括每个家庭的 ID 号、提供的床位数、入住人数、性别, 其他未出现在表格中的 ID 表示此家庭未被选中。

表 4 最少支出费用的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
27	5	5	男	16	5	5	女
43	5	5	男	52	5	5	女
50	5	5	男	58	5	5	女
81	5	5	男	98	5	5	女
86	5	5	男	102	5	5	女
122	5	5	男	142	5	5	女
-	-	-	-	144	5	5	女
-	-	-	-	159	5	5	女

2) 与上述最优方案类似的方案

由于目标很少, 求得的方案并非唯一的, 下列表格是类似的最优寄宿分配方案 (提供的床位数均为 5 个的家庭)。每一行包括: 选取性别要求为 2 (女) 的家庭数、选取性别要求为 1 (男) 的家庭数、选取性别要求为 0 (男女均可) 的家庭数。

表 5 最少支出费用的寄宿安排类似所有的方案

2 属性家庭数	1 属性家庭数	0 属性家庭数	方案是否可取	2 属性家庭数	1 属性家庭数	0 属性家庭数	方案是否可取
0	0	6 男 8 女	×	5	0	6 男 3 女	√
0	1	5 男 8 女	×	5	1	5 男 3 女	√
0	2	4 男 8 女	×	5	2	4 男 3 女	√
0	3	3 男 8 女	√	5	3	3 男 3 女	√
0	4	2 男 8 女	√	5	4	2 男 3 女	√
0	5	1 男 8 女	√	5	5	1 男 3 女	√
0	6	0 男 8 女	√	5	6	0 男 3 女	√
1	0	6 男 7 女	×	6	0	6 男 2 女	√
1	1	5 男 7 女	×	6	1	5 男 2 女	√
1	2	4 男 7 女	√	6	2	4 男 2 女	√
1	3	3 男 7 女	√	6	3	3 男 2 女	√
1	4	2 男 7 女	√	6	4	2 男 2 女	√
1	5	1 男 7 女	√	6	5	1 男 2 女	√

1	6	0男7女	√	6	6	0男2女	√
2	0	6男6女	×	7	0	6男1女	√
2	1	5男6女	√	7	1	5男1女	√
2	2	4男6女	√	7	2	4男1女	√
2	3	3男6女	√	7	3	3男1女	√
2	4	2男6女	√	7	4	2男1女	√
2	5	1男6女	√	7	5	1男1女	√
2	6	0男6女	√	7	6	0男1女	√
3	0	6男5女	√	8	0	6男0女	√
3	1	5男5女	√	8	1	5男0女	√
3	2	4男5女	√	8	2	4男0女	√
3	3	3男5女	√	8	3	3男0女	√
3	4	2男5女	√	8	4	2男0女	√
3	5	1男5女	√	8	5	1男0女	√
3	6	0男5女	√	8	6	0男0女	√
4	0	6男4女	√	-	-	-	-
4	1	5男4女	√	-	-	-	-
4	2	4男4女	√	-	-	-	-
4	3	3男4女	√	-	-	-	-
4	4	2男4女	√	-	-	-	-
4	5	1男4女	√	-	-	-	-
4	6	0男4女	√	-	-	-	-

《注》：根据计算结果可知，男生女生均入住有五个床位的寄宿家庭。其中，2属性满足条件的寄宿家庭有10个，1属性满足条件的寄宿家庭有6个，0属性满足条件的寄宿家庭有11个。并且全体男生需要入住6个寄宿家庭，全体女生需要入住8个寄宿家庭。

根据上表，对所有男生女生入住满足条件的寄宿家庭的情况进行排列组合，并去除不可取方案（所需的0属性家庭数超过提供的家庭数）即得到可取方案。

6.3 模型II的评价

1) 用 *Lingo* 软件求解此规划问题，结果显示具体，但只会给出一种方案，在此方案的基础上我们可以对等价的寄宿家庭进行替换。

2) 用 0-1、整数混合规划模型求解此问题，在数据量较少的时候会很快解出最优解。但当数据增多时，由于是非线性的整数规划问题，*Lingo* 求解一般会很慢，有时没有可行解。

3) 由于目标较少，方案数较多，因此在用 0-1 规划时求解得到仅为一个局部最优解。

4) 由于该问题中所给寄宿家庭数较多，因此得出的结果优先选择具有最多床位数的家庭，这样也避免了一个学生独自寄宿一个家庭的情况。

5) 该模型求得的最少支出费用以最少家庭数和最少空床位作为约束条件，使得问题简化为对最少家庭数和最少空床位的双目标规划模型。

6) 由于只有一个团队进行方案选择，即使寄宿家庭数较大，但采用 *Lingo* 软件求解

得出其中一种最优方案所需时间相对还是较短，若当导入较多的团队数，可化作运输模型的例子，那么可能会使所需时间变长。

七. 团队寄宿选择模型（问题三）

此节主要研究在对多个团队分配寄宿家庭环节中，总有些团队不希望与别的团队共寄一檐。针对这个约束条件，我们重新对团队进行分组，以支出费用为目标，结合约束条件，建立 0-1 线性规划模型，求出可行的方案。

7.1 模型III分析与建立

7.1.1 多个团队分配思路的确立

此问题仍然可以考虑用第一问的运输模型思路来求解，但考虑到用原来的模型需要的变量很多，变量涉及到 0-1 变量和整数变量，而且是非线性规划问题。所以，我们更新了第一问的思路，把考虑具体几个学生被送到寄宿家庭转换成只考虑具体选择哪些寄宿家庭。

此问题用图示可表示为：（其含义为第 i 个组是否选择了第 j 个寄宿家庭）

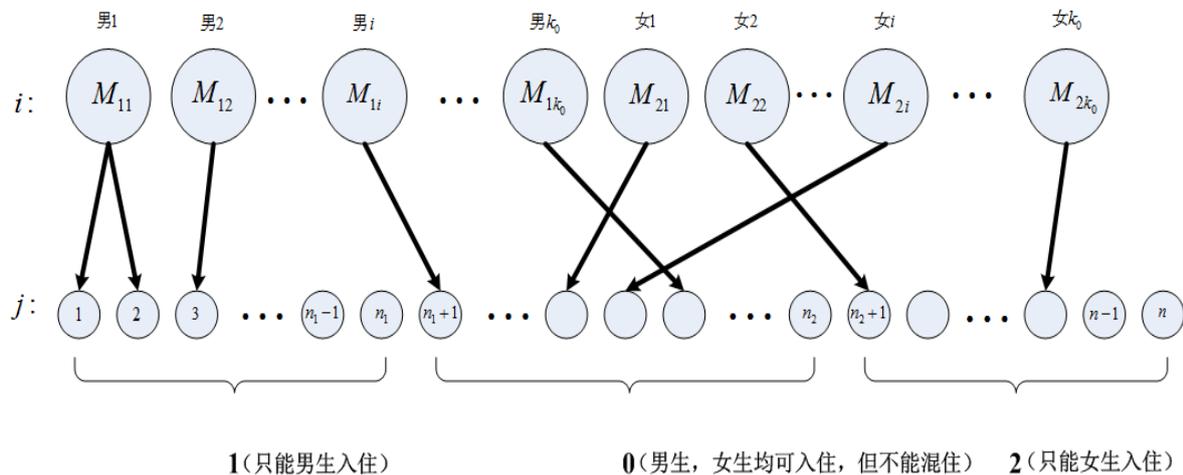


图 2 多个团队的寄宿安排模型示意图

其中，只能入住男生的家庭为 $1 \sim n_1$ ，男女生均可入住的家庭为 $n_1+1 \sim n_2$ ，只能入住女生的家庭为 $n_2+1 \sim n$ 。

7.1.2 模型分析

在第二题的基础上，把问题转到为多个团队上分配，其模型的数据量大大增加了，且个团队之间的相互影响增强了。所以，重点在考虑各团队之间影响的约束关系和目标函数的表达。

下面将分析解决该问题的目标函数和约束条件。

目标分析

设有 k 个团队不愿意与别的团队共寄一檐，则我们可把剩余的 $T-k$ 个团队合成一个团队（ T 为初始团队总数）。最终形成的团队数为：

$$k_0 = \begin{cases} k+1 & (0 \leq k \leq 9) \\ k & (k = 10) \end{cases} \quad (3.1)$$

对于此问题，引入 0-1 决策变量 x_{ij} 表示第 i 个团队的男生是否选择第 j 个寄宿家庭， y_{ij} 表示第 i 个团队的女生是否选择第 j 个寄宿家庭，则：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示第 } i \text{ 个团队男生选择第 } j \text{ 号家庭} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示第 } i \text{ 个团队女生选择第 } j \text{ 号家庭} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

题目规定提供寄宿服务的每个家庭税费为 50 美元（用 C_1 表示），则总共需要支付的**税费**可表示为：

$$P_1 = C_1 \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} + C_1 \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=n_1+1}^n y_{ij} \quad (3.2)$$

题目中说明提供寄宿服务的家庭若床位没有住满，每个空床费为 20 美元（用 C_2 表示），则总共需要支付的**空床费**可表示为：

$$P_2 = C_2 \left(\sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{n_2} d_j x_{ij} + \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=n_1+1}^n d_j y_{ij} - M \right) \quad (3.3)$$

其中， d_j 为第 j 号家庭所提供的床位数， M 为总人数（本题为 556 人）。

另外，还有固定的费用需要支付，即每人 100 美元（用 C_3 表示）的入住费，总人数是固定的，所以此费用是固定的。总共需要支付的**入住费**可表示为：

$$P_3 = C_3 M$$

所以，以总费用为**目标函数**，可以表示为：

$$M \text{ in } P_1 + P_2 + P_3 \quad (3.4)$$

约束分析

1) 男生人数的约束

所有男生都要被分配寄宿家庭，但分配的家庭床位可以没有住满，所以要求满足每个组分到的床位数要不小于小组的人数，即可表示为：

$$\sum_{j=1}^{n_2} d_j x_{ij} \geq M_{1i} \quad (i = 1, 2, \dots, k_0) \quad (3.5)$$

其中， M_{1i} 表示第 i 个团队的男生数。

2) 女生人数约束

所有女生都要被分配寄宿家庭，但分配的家庭床位可以没有住满，所以要求满足每个组分到的床位数要不小于小组的人数，即可表示为：

$$\sum_{j=n_1+1}^n d_j y_{ij} \geq M_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, k_0) \quad (3.6)$$

其中， M_{2i} 表示第 i 个团队的女生数。

3) 不混住约束

由于分配寄宿家庭的分配要求可得，男女不能入住同一个家庭，且不愿意与别人共寄一檐团队也不能入住同一个家庭，则有：

$$\sum_{i=1}^{k_0} (x_{ij} + y_{ij}) \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

7.1.3 模型III建立

基于 7.1.2 分析, 以 (3.4) 为目标, 以 (3.5) ~ (3.7) 为主要约束, 建立 0-1 线性规划, 表达式如下:

$$\text{Min } P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_1 = C_1 \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} + C_1 \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=n_1+1}^n y_{ij} \quad (3.2)$$

$$P_2 = C_2 \left(\sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{n_2} d_j x_{ij} + \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=n_1+1}^n d_j y_{ij} - M \right) \quad (3.3)$$

$$P_3 = C_3 M$$

$$S.T. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_2} d_j x_{ij} \geq M_{1i} & (i=1, 2, \dots, k_0) & (3.5) \\ \sum_{j=n_1+1}^n d_j y_{ij} \geq M_{2i} & (i=1, 2, \dots, k_0) & (3.6) \\ \sum_{i=1}^{k_0} (x_{ij} + y_{ij}) \leq 1 & (j=1, 2, \dots, n) & (3.7) \\ x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\} \\ k_0 = \begin{cases} k+1 & (0 \leq k \leq 9, i \in Z) \\ k & (k=10) \end{cases} & & (3.1) \end{cases}$$

模型说明:

- (3.2) 为寄宿中心应支付的总税费。 (3.3) 为寄宿中心应支付的总空床费。
 (3.5) 为男生人数的约束, 即每组分配的床位数不小于每组的人数。
 (3.6) 为女生人数的约束, 即每组分配的床位数不小于每组的人数。
 (3.7) 为不混住约束。 (3.1) 为 10 个团队重新划分后团队数。

- x_{ij} —— 第 i 个团队的男生是否选择第 j 个寄宿家庭;
 y_{ij} —— 第 i 个团队的女生是否选择第 j 个寄宿家庭;
 d_j —— 第 j 号家庭提供的床位数; k —— 有 k 个团队不愿与别的团队共寄;
 M_{1i} 、 M_{2i} —— 分别为第 i 个团队的男生数、女生数;
 C_1 、 C_2 、 C_3 —— 分别为每个家庭的税费、空床位费、每个学生入住费;
 n_1 、 n_2 、 n —— 分别为只能入住男生的家庭数、能入住男生家庭数、总家庭数。

7.2 模型III的求解 (程序见附件 1.4~1.5)

7.2.1 模型求解的方法

此模型为一个标准的 0-1 线性规划问题，可使用 *Lingo* 软件求解。

在 *Lingo* 中编写线性规划的程序，其家庭数为 200 个，团队数为 10 个，可以举例求解此问题。例如，假设有 1（或 5 个）个团队不愿与别的团队共寄。

由于数据量的大大增加，总体规划模型的语言比问题二有所增加较，不同的情况求解的时间相差很大。

7.2.2 求解的结果

1) 情况一

当 $k=1$ 时，即有 1 个团队来自同一学校或同一家庭（不妨设第 1 个团队来自同一学校或同一家庭，则我们可以把 10 个团队重新分配成 2 个团队）。由 *Lingo* 求解结果知：需要支付的最少费用为 64050 美元，学生入住最少家庭数 169 个，并且入住的 169 个家庭均为空余床位产生。

来自同一家庭或同一的学校的团队的分配方案如表 6，剩余团队的分配方案见附件 2.2。

表 6 情况一的第 1 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
31	2	2	男	29	3	3	女
81	5	5	男	52	5	5	女
86	5	5	男	—	—	—	—

2) 情况二

当 $k=5$ 时，即有 5 个团队来自同一学校或同一家庭（不妨设第 1~5 个团队来自同一学校或同一家庭，则我们可以把 10 个团队重新分配成 6 个团队）。由 *Lingo* 求解结果知：需要支付的最少费用仍为 65450 美元，所以学生入住 169 个家庭，并且入住的 169 个家庭均为空余床位产生。

来自同一家庭或同一学校 1~5 号团队的分配方案分别如下表 7~表 11。剩余团队的分配方案见附录 2.3。

表 7 情况二的第 1 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
54	2	2	男	98	5	5	女
125	2	2	男	146	3	3	女
129	2	2	男	—	—	—	—
130	2	2	男	—	—	—	—
139	2	2	男	—	—	—	—
153	2	2	男	—	—	—	—

表 8 情况二的第 2 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
9	3	3	男	21	4	4	女
15	2	2	男	34	4	4	女
20	2	2	男	35	3	3	女

31	2	2	男	82	3	3	女
44	2	2	男	88	3	3	女
69	2	2	男	92	3	3	女
120	2	2	男	96	3	3	女
162	2	2	男	108	3	3	女
166	2	2	男	134	3	3	女
167	2	2	男	137	3	3	女
170	2	2	男	191	2	2	女
188	2	2	男	194	3	3	女
192	3	3	男	198	3	3	女
193	2	2	男	—	—	—	—

表 9 情况二的第 3 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
4	3	3	男	7	3	3	女
6	3	3	男	32	3	3	女
103	3	3	男	48	3	3	女
119	3	3	男	49	3	3	女
124	3	3	男	51	3	3	女
135	3	3	男	87	4	4	女
165	3	3	男	114	4	4	女
175	2	2	男	115	3	3	女
—	—	—	—	144	5	5	女
—	—	—	—	149	5	5	女
—	—	—	—	185	3	3	女
—	—	—	—	186	5	5	女

表 10 情况二的第 4 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
27	5	5	男	42	3	3	女
38	3	3	男	46	4	4	女
62	4	4	男	52	5	5	女
76	4	4	男	56	3	3	女
81	5	5	男	58	5	5	女
91	2	2	男	78	5	5	女
95	4	4	男	99	4	4	女
152	4	4	男	102	5	5	女
157	4	4	男	109	4	4	女
—	—	—	—	127	4	4	女
—	—	—	—	145	3	3	女
—	—	—	—	154	5	5	女
—	—	—	—	168	2	2	女

-	-	-	-	183	2	2	女
-	-	-	-	197	4	4	女

表 11 情况二的第 5 团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
50	5	5	男	16	5	5	女
-	-	-	-	18	3	3	女
-	-	-	-	22	2	2	女
-	-	-	-	101	3	3	女
-	-	-	-	113	4	4	女
-	-	-	-	138	4	4	女
-	-	-	-	142	5	5	女

7.3 模型Ⅲ的检验

同模型 I 检验方法相似，用贪心算法思想对建立的模型进行检验，使得分配结果更具完善。由 *Matlab* 程序运行结果可知：需要支付的最少费用仍为 64050 美元，学生入住家庭数为 169 个，且没有空余床位产生。

7.4 模型Ⅲ的评价

1) 用 *Lingo* 软件求解此规划问题，针对每一种团队与团队之间不同住的情况，均只会给出一种方案。

2) 此模型为 0-1 线性规划，并且用运输模型对问题进行简化，使得在用 *Lingo* 进行计算时，减少了时间消耗，但当简化后的团队数增加后，由于对应匹配情况增加，从而在时间消耗上呈现较快速度增加。

3) 本问题的目标函数依旧是支出费用最小函数，因此可以简化为寄宿家庭数最少和空床位数最少的双目标规划问题。

4) 本问题简化后的团队数和寄宿家庭数均较多，因此在最终方案中存在较多的等价寄宿家庭可供替换，由于 *Lingo* 求解只给出了一种可行方案，所以，具体的可行方案可根据实际情况进行选择、替换。

5) 该模型讨论一个团队不与其他团队同住到十个团队均不与其他团队同住的情况，实际我们只给出两中情况，由于不与其他团队共住的团队数的增加，那么实际运算次数和数据也将增加，同时 *Lingo* 的求解过程也将增长。

八. 模型改进方向

由于题中所给信息有限，因此文本中的模型在实际应用中还存在这一定的改进空间，若充分考虑的各类相关信息，可做下列方面的改进：

(1) 考虑加入学生满意度

该题目中的评价标准较为单一，仅设定寄宿中心支出的费用为评价标准。而实际情况中，寄宿中心考虑的因素不仅仅包括较少的支出费用还有学生对安排方案的满意度，因此有必要引入学生满意度函数，通过学生是否独自居住一个寄宿家庭，学生是否与来自同一团队，家庭或学校的学生共同居住等相关因素来控制该满意度。最终通过满意度和支付费用之间的加权求值来确定最优方案。

(2) 考虑学生之间存在的联系

题中所给的团队信息较单一，仅说明了男女人数或者可能存在来自于同一学校或者家庭的可能性，但在实际情况中，可能还存在团队中的学生之间存在着相互的联系，因此根据实际的学生之间的联系情况，可以将存在联系的学生设定为一个约束条件，尽量安排他们在同一寄宿家庭中，从而能够提升团队对寄宿中心安排方案的满意度。

(3) 考虑学生中途交换寄宿家庭的情况

本题中的模型仅考虑了一次安排入住的情况，而实际情况中可能会出现中途学生申请换寄宿家庭的情况，为了充分考虑到换家庭可能存在的问题和满意度的影响，可以考虑在模型中设定交换家庭的情况的概率和因素，从而修正原模型，给出备用方案。

(4) 考虑到学生特殊的喜好和兴趣

本题中的寄宿家庭的信息较为单薄，因此我们还需要完善寄宿家庭的部分信息，例如具体家庭位置等因素，充分考虑到学生的特殊喜好和兴趣，例如有些学生可能比较向往去美国的特定一个城市或州。那么我们可以将学生再进行分区，对每个区的相应的寄宿家庭重新进行求解得出较优的解决方案。

参考文献

- [1] 邵铮, 周天凌, 马健兵. 钢管的订购和运输解答模型[J] 数学的实践与认识, 2001, 31 (1)
- [2] 西北工业大学数学建模指导委员会, 数学建模建模简明教程[M] 北京: 高等教育出版社 2009
- [3] 谢金星、薛毅, 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M] 北京: 清华大学出版社 2005
- [4] 潘金贵, 顾铁成, 李成法等. 算法导论[M] 北京: 机械工业出版社 2007

附件

附件 1 (程序附件)

1.1 问题一 LINGO 求解程序

```
model:
!模拟竞赛2_1;
sets:
leibie/1..2/;;
mudi/1..30/:d;
links(leibie,mudi):a,x;
endsets
data:
d=@file('Data1.txt');    !从文件中读取各个家庭的床位数;
B=30;                    !某队男生人数;
C=40;                    !某队女生人数;
enddata
!*****目标函数*****;
min=@sum(links(i,j):x(i,j));
!*****约束条件*****;
!需寄宿学生总数约束;
@sum(links(i,j)|(j#le#22#and#j#ge#1)#and#(i#eq#1):a(i,j)*x(i,j))=B;
@sum(links(i,j)|(j#le#30#and#j#ge#7)#and#(i#eq#2):a(i,j)*x(i,j))=C;
!送往某家庭的人数需不大于其提供的床位数;
@for(links(i,j)|(j#le#22#and#j#ge#1)#and#(i#eq#1):a(i,j)<=d(j));
@for(links(i,j)|(j#le#30#and#j#ge#7)#and#(i#eq#2):a(i,j)<=d(j));
!男女不能混住约束;
@for(links(i,j)|(j#le#22#and#j#ge#7)#and#(i#eq#1):x(1,j)*x(2,j)=0);
!决策变量约束;
@for(links(i,j):@bin(x));
!送往某家庭的人数需为整数约束;
@for(links(i,j):@gin(a));
end
```

1.2 模型 I 的检验程序 (C++程序)

```
#include <iostream>
using namespace std;
#define A 30//男生人数
#define B 40//女生人数
void main()
{
    int a[30]={5,5,4,4,4,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,2,2,1,1,1,1};//按床位数排序后结果
    int ca[30]={0,1,0,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1};//男生可供选择家庭标记
    int cb[30]={1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1};//女生可供选择家庭标记
    int
id[30]={16,27,3,5,8,11,21,24,26,28,1,2,4,6,7,9,10,12,13,18,19,29,14,15,20,22,17,23,25,30};
//排序后家庭ID
    int num1=0; //男生选择家庭数目
    int num2=0; //女生选择家庭数目
    int sum=0; //男生或女生入住人数

    int j=0;
    cout<<"女生入住寄宿家庭ID:"<<endl;
    while(sum<B) //当女生入住的人数还未达到预定的B人数时,执行循环
    {
        if(cb[j]) //对可供女生选择的家庭进行遍历
        {
            sum+=a[j];
            ca[j]=0; //若选择了该号房间,那么在男生可供选择家庭标记中应该标记为
```

```

        cout<<id[j]<<" "; //入住该号寄宿家庭后输出家庭ID
        num2++;           //女生选择家庭数加
    }
    j++;
}
cout<<endl;

if(sum>B)                //最后一个选择家庭没有住满
    cout<<"最后一个家庭只需床位"<<sum-B<<endl;
else
    cout<<"刚好全部住满"<<endl;
cout<<"女生入住家庭数为"<<num2<<endl;

sum=0;
int i=0;
cout<<"男生入住寄宿家庭ID:"<<endl;
while (sum<A)           //当男生入住的人数还未达到预定的A人数时，执行循环
{
    if(ca[i])           //对可供男生选择的家庭进行遍历
    {
        sum+=a[i];
        cout<<id[i]<<" "; //入住该号寄宿家庭后输出家庭ID
        num1++;         //男生选择家庭数加
    }
    i++;
}
cout<<endl;

if(sum>A)                //最后一个选择家庭没有住满
    cout<<"最后一个家庭只需床位"<<sum-A<<endl;
else
    cout<<"刚好全部住满"<<endl;
cout<<"男生入住家庭数为"<<num1<<endl;
}

```

1.3 问题二 LINGO 求解程序

```

model:
!模拟竞赛2_2;
sets:
leibie/1..2/;;
mudi/1..200/:d;
links(leibie,mudi):a,x;
endsets
data:
d=@file('Data2.txt'); !从文件中读取各个家庭的床位数;
C1=20;                 !一个空位数缴纳的费用;
C2=50;                 !入住一个家庭缴纳的税收费用;
C3=100;                !每个学生入住，寄宿中心向寄宿家庭缴纳的费用;
B=30;                 !队中男生人数;
G=40;                 !队中女生人数;
enddata
!*****目标函数*****;
min=p1+p2+p3;
p1=@sum(links(i,j):C1*(d(j)*x(i,j)))-C1*(B+G);
p2=@sum(links(i,j):C2*x(i,j));
p3=100*(B+G);
!*****约束条件*****;
!需寄宿男女学生的约束;
@sum(links(i,j)|(j#le#127#and#j#ge#1)#and#(i#eq#1):a(i,j)*x(i,j))=B;
@sum(links(i,j)|(j#le#200#and#j#ge#128)#and#(i#eq#2):a(i,j)*x(i,j))=G;
!送往某寄宿家庭人数需不大于其提供的床位数;

```

```

@for(links(i,j)|(j#le#127#and#j#ge#1)#and#(i#eq#1):a(i,j)<=d(j));
@for(links(i,j)|(j#le#200#and#j#ge#128)#and#(i#eq#2):a(i,j)<=d(j));
!男女不能混住约束;
@for(links(i,j)|(j#le#127#and#j#ge#61)#and#(i#eq#1):x(1,j)+x(2,j)<=1);
!决策变量约束;
@for(links(i,j):@bin(x));
!送往某家庭的学生人数需为整数约束;
@for(links(i,j):@gin(a));
end

```

1.4 问题三（情况一）LINGO 求解程序

```

model:
!模拟竞赛2_3(只有一支来自同一学校或家庭的情况);
sets:
haode/1..200/:a,b1,g1,b2,g2;
endsets
data:
a=@file('Data2.txt');      !从文件中读取各个家庭的床位数;
M11=12;M12=240;           !重新分队后各队男生人数;
M21=8;M22=296;           !重新分队后各队男生人数;
enddata
!*****目标函数*****;
!总费用最小;
min=556*100+@sum(haode(i):50*b1(i))+@sum(haode(i):50
*g1(i))+@sum(haode(i):50*b2(i))+@sum(haode(i):50*g2(i))
+(bb1+bb2+gg1+gg2-556)*20;
!总家庭数最小;
!min=@sum(haode(i):b1(i))+@sum(haode(i):g1(i))+@sum(haode(i):
b2(i))+@sum(haode(i):g2(i));
!*****约束条件*****;
!各队男女生占据的床位数;
bb1=@sum(haode(i)|((i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b1(i));
bb2=@sum(haode(i)|((i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b2(i));
gg1=@sum(haode(i)|(i#le#200#and#i#ge#61):a(i)*g1(i));
gg2=@sum(haode(i)|(i#le#200#and#i#ge#61):a(i)*g2(i));
!各队男生占据床位数需不小于其总人数;
bb1>=M11;bb2>=M12;gg1>=M21;gg2>=M22;
!对于某一家庭不同队不能混住并且同队男女不能混住约束;
@for(haode(i):b1(i)+b2(i)+g1(i)+g2(i)<=1);
!决策变量0或1约束;
@for(haode(i):@bin(b1));@for(haode(i):@bin(b2));
@for(haode(i):@bin(g1));@for(haode(i):@bin(g2));
end

```

1.5 问题三（情况二）LINGO 求解程序

```

model:
!模拟竞赛2_3(有5个队来自同一家庭或学校的情况);
sets:
haode/1..200/:a,b1,g1,b2,g2,b3,g3,b4,g4,b5,g5,b6,g6;
endsets
data:
a=@file('Data2.txt');      !从文件中读取每个家庭提供的床位数;
M11=12;M12=30;M13=23;M14=35;M15=5;M16=147;   !重新分队后各队男生总人数;
M21=8;M22=40;M23=44;M24=58;M25=26;M26=128;   !重新分队后各队男生总人数;
enddata
!目标函数;
min=556*100+@sum(haode(i):50*b1(i))+@sum(haode(i):50*g1(i))+@sum(haode(i):50*b2(
i))
+@sum(haode(i):50*g2(i))+@sum(haode(i):50*b3(i))+@sum(haode(i):50*g3(i))+@sum(ha
ode(i):50*b4(i))

```

```

+@sum(haode(i):50*g4(i))+@sum(haode(i):50*b5(i))+@sum(haode(i):50*g5(i))+@sum(ha
ode(i):50*b6(i))
+@sum(haode(i):50*g6(i))+(bb1+bb2+bb3+bb4+bb5+bb6+gg1+gg2+gg3+gg4+gg5+gg6-556)*2
0;    !最小总费用;
!min=@sum(haode(i):b1(i))+@sum(haode(i):g1(i))+@sum(haode(i):b2(i))+@sum(haode(i)
):g2(i))
+@sum(haode(i):b3(i))+@sum(haode(i):g3(i))+@sum(haode(i):b4(i))+@sum(haode(i):g4
(i))+
@sum(haode(i):b5(i))+@sum(haode(i):g5(i))+@sum(haode(i):b6(i))+@sum(haode(i):g6(
i));!入住的最小家庭数;
!计算不同队男女生占据的床位总数;
bb1=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b1(i);
bb2=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b2(i);
bb3=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b3(i);
bb4=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b4(i);
bb5=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b5(i);
bb6=@sum(haode(i)|(i#le#127)#and#i#ge#1):a(i)*b6(i);
gg1=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g1(i);
gg2=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g2(i);
gg3=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g3(i);
gg4=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g4(i);
gg5=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g5(i);
gg6=@sum(haode(i)|(i#le#200)#and#i#ge#61):a(i)*g6(i);
!不同队男女生占据床位总数不小于其总人数;
bb1>=M11;bb2>=M12;bb3>=M13;bb4>=M14;bb5>=M15;bb6>=M16;
gg1>=M21;gg2>=M22;gg3>=M23;gg4>=M24;gg5>=M25;gg6>=M26;
!对于某一个家庭不能队与队混住并且男女也不能混住;
@for(haode(i):b1(i)+b2(i)+b3(i)+b4(i)+b5(i)+b6(i)+g1(i)+g2(i)+g3(i)+g4(i)+g5(i)+
g6(i)<=1);
!决策变量取0或1;
@for(haode(i):@bin(b1));@for(haode(i):@bin(b2));@for(haode(i):@bin(b3));
@for(haode(i):@bin(b4));@for(haode(i):@bin(b5));@for(haode(i):@bin(b6));
@for(haode(i):@bin(g1));@for(haode(i):@bin(g2));@for(haode(i):@bin(g3));
@for(haode(i):@bin(g4));@for(haode(i):@bin(g5));@for(haode(i):@bin(g6));
end

```

1.6 模型III的检验程序 (MATLAB 程序)

```

SexFlag=[sexflag_data];
ID=[id_data];
BedCount=[bedcount_data]; %1-3行导入数据
B=[12,240];
G=[8,296];
M=556;           %总人数
C1=100;         %单个学生入住需交的费用
C2=50;          %单个家庭缴纳的费用
C3=20;          %单个床位空出产生的费用
CountB1=0;      %重新分队后队1男生入住家庭数
CountG1=0;      %重新分队后队1女生入住家庭数
sumG1=0;
disp('队1女生入住寄宿家庭ID: ')
for j=1:200
    if SexFlag(j)==2 |SexFlag(j)==0
        %标志位为2或1的女生可以入住
        if BedCount(j)==0
            continue;
        end
        sumG1=sumG1+BedCount(j);
        if sum>G(1)
            sumG1=sumG1-BedCount(j);
            continue;
        end
        ID(j)
        BedCount(j)=0;
        CountG1=CountG1+1;
    end
end

```

```

        if sumG1==G(1)
            break;
        end
    end
end
sumB1=0;
disp('男生入住寄宿家庭ID: ')
for j=1:200
    if SexFlag(j)==1 | SexFlag(j)==0
        %标志位为1或0的男生可以入住
        if BedCount(j)==0
            continue;
        end
        sumB1=sumB1+BedCount(j);
        if sumB1>B(1)
            sumB1=sumB1-BedCount(j);
            continue;
        end
        ID(j)
        BedCount(j)=0;
        CountB1=CountB1+1;
        if sumB1==B(1)
            break;
        end
    end
end
end
Count1=CountB1+CountG1 %队1入住的家庭总数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
CountB2=0; %重新分队后队2男生入住家庭数
CountG2=0; %重新分队后队2女生入住家庭数
sumB2=0;
disp('男生入住寄宿家庭ID: ')
for j=1:200
    if SexFlag(j)==1 | SexFlag(j)==0
        %标志位为1或0的男生可以入住
        if BedCount(j)==0
            continue;
        end
        sumB2=sumB2+BedCount(j);
        if sumB2>B(2)
            sumB2=sumB2-BedCount(j);
            continue;
        end
        ID(j);
        BedCount(j)=0;
        CountB2=CountB2+1;
        if sumB2==B(2)
            break;
        end
    end
end
end
sumG2=0;
disp('女生入住寄宿家庭ID: ')
for j=1:200
    if SexFlag(j)==2 | SexFlag(j)==0
        %标志位为2或1的女生可以入住
        if BedCount(j)==0
            continue;
        end
        sumG2=sumG2+BedCount(j);
        if sum>G(2)
            sumG2=sumG2-BedCount(j);
            continue;
        end
        ID(j);
        BedCount(j)=0;

```

```

        CountG2=CountG2+1;
    if sumG2==G(2)
        break;
    end
end
end
Count2=CountB2+CountG2; %队2入住的家庭总数
Count=Count1+Count2 ; %入住的总家庭数
P=C1*M+Count*C2+C3*(sumB1+sumB2+sumG1+sumG2-M) %支出费用

```

附件 2（表格附件）

2.1 问题一的数据预处理结果

ID	床位数	家庭属性	ID	床位数	家庭属性
4	3	1	23	1	0
6	3	1	25	1	0
5	4	1	30	1	0
8	4	1	15	2	0
26	4	1	20	2	0
27	5	1	22	2	0
17	1	2	1	3	0
14	2	2	2	3	0
7	3	2	9	3	0
13	3	2	10	3	0
3	4	2	12	3	0
21	4	2	18	3	0
28	4	2	19	3	0
16	5	2	29	3	0
—	—	—	11	4	0
—	—	—	24	4	0

2.2 问题三（情况一）剩余团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
4	3	3	男	1	3	3	女
5	4	4	男	2	3	3	女
6	3	3	男	3	4	4	女
8	4	4	男	7	3	3	女
15	2	2	男	9	3	3	女
20	2	2	男	10	3	3	女
22	2	2	男	11	4	4	女
26	4	4	男	12	3	3	女
27	5	5	男	13	3	3	女
37	3	3	男	14	2	2	女
38	3	3	男	16	5	5	女
39	3	3	男	18	3	3	女

40	5	5	男	19	3	3	女
43	5	5	男	21	4	4	女
45	3	3	男	24	4	4	女
47	3	3	男	28	4	4	女
50	5	5	男	32	3	3	女
57	2	2	男	34	4	4	女
60	3	3	男	35	3	3	女
62	4	4	男	36	5	5	女
65	2	2	男	41	5	5	女
66	2	2	男	42	3	3	女
67	4	4	男	46	4	4	女
68	4	4	男	48	3	3	女
70	3	3	男	49	3	3	女
71	3	3	男	51	3	3	女
72	5	5	男	55	2	2	女
76	4	4	男	56	3	3	女
82	3	3	男	58	5	5	女
83	4	4	男	59	2	2	女
84	3	3	男	63	2	2	女
88	3	3	男	64	2	2	女
91	2	2	男	69	2	2	女
92	3	3	男	74	5	5	女
95	4	4	男	75	5	5	女
101	3	3	男	78	5	5	女
103	3	3	男	80	4	4	女
104	3	3	男	85	2	2	女
107	2	2	男	87	4	4	女
108	3	3	男	89	2	2	女
111	2	2	男	96	3	3	女
112	4	4	男	98	5	5	女
114	4	4	男	99	4	4	女
116	2	2	男	102	5	5	女
119	3	3	男	106	2	2	女
120	2	2	男	109	4	4	女
124	3	3	男	110	2	2	女
125	2	2	男	113	4	4	女
130	2	2	男	115	3	3	女
133	3	3	男	118	5	5	女
134	3	3	男	121	2	2	女
135	3	3	男	122	5	5	女
137	3	3	男	126	4	4	女

139	2	2	男	127	4	4	女
140	3	3	男	132	5	5	女
151	5	5	男	138	4	4	女
152	4	4	男	141	3	3	女
153	2	2	男	142	5	5	女
157	4	4	男	143	2	2	女
162	2	2	男	144	5	5	女
164	2	2	男	145	3	3	女
165	3	3	男	146	3	3	女
166	2	2	男	147	2	2	女
167	2	2	男	148	2	2	女
168	2	2	男	149	5	5	女
170	2	2	男	154	5	5	女
175	2	2	男	156	4	4	女
177	3	3	男	158	3	3	女
178	4	4	男	159	5	5	女
179	3	3	男	160	4	4	女
184	4	4	男	163	4	4	女
186	5	5	男	169	4	4	女
189	3	3	男	171	3	3	女
192	3	3	男	172	3	3	女
196	4	4	男	173	2	2	女
197	4	4	男	174	3	3	女
199	3	3	男	176	3	3	女
-	-	-	-	181	3	3	女
-	-	-	-	182	4	4	女
-	-	-	-	183	2	2	女
-	-	-	-	185	3	3	女
-	-	-	-	188	2	2	女
-	-	-	-	190	3	3	女
-	-	-	-	191	2	2	女
-	-	-	-	194	3	3	女
-	-	-	-	195	2	2	女
-	-	-	-	198	3	3	女

2.3 问题三（情况二）剩余团队的寄宿安排方案

ID	床位数	入住人数	性别	ID	床位数	入住人数	性别
5	4	4	男	1	3	3	女
8	4	4	男	2	3	3	女
12	3	3	男	3	4	4	女
26	4	4	男	10	3	3	女
33	2	2	男	11	4	4	女

36	5	5	男	13	3	3	女
37	3	3	男	14	2	2	女
39	3	3	男	19	3	3	女
40	5	5	男	24	4	4	女
41	5	5	男	28	4	4	女
43	5	5	男	29	3	3	女
47	3	3	男	45	3	3	女
57	2	2	男	55	2	2	女
60	3	3	男	59	2	2	女
67	4	4	男	63	2	2	女
68	4	4	男	65	2	2	女
70	3	3	男	66	2	2	女
71	3	3	男	75	5	5	女
72	5	5	男	80	4	4	女
74	5	5	男	85	2	2	女
83	4	4	男	106	2	2	女
84	3	3	男	110	2	2	女
86	5	5	男	121	2	2	女
104	3	3	男	126	4	4	女
107	2	2	男	141	3	3	女
111	2	2	男	143	2	2	女
112	4	4	男	156	4	4	女
116	2	2	男	158	3	3	女
118	5	5	男	159	5	5	女
122	5	5	男	160	4	4	女
132	5	5	男	163	4	4	女
133	3	3	男	164	2	2	女
140	3	3	男	169	4	4	女
151	5	5	男	171	3	3	女
177	3	3	男	172	3	3	女
178	4	4	男	174	3	3	女
184	4	4	男	176	3	3	女
189	3	3	男	179	3	3	女
196	4	4	男	181	3	3	女
199	3	3	男	182	4	4	女
—	—	—	—	190	3	3	女
—	—	—	—	195	2	2	女